1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 *Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A, B. Με πιθανότητα 0.5 θα συμβεί το A, με πιθανότητα 0.4 θα συμβεί το B και με πιθανότητα 0.3 θα συμβούν και τα δυο. Ποια είναι η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα από τα δύο;*

Λύση: *Η πιθανότητα να συμβεί ένα από τα δύο είναι:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6.$$

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το συμπλήρωμα το συμπλήρωμα του ενδεχομένου να συμβεί ένα από τα δύο και έτσι

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) = .4$$

□

Άσκηση 2 *Κατά την ρίψη δύο ζαριών, ποια είναι η πιθανότητα, το άθροισμα τους να ισούται με 7;*

Λύση: Θα λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, με την προϋπόθεση ότι όλα τα 36 αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά να πραγματοποιηθούν. Καθώς υπάρχουν 6 πιθανά αποτελέσματα $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ έτσι ώστε το αποτέλεσμα στο άθροισμα των ζαριών να είναι 7, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
□

Άσκηση 3 *Αν «επιλέξουμε τυχαία» 3 μπάλες από ένα κουτί που περιέχει 6 λευκές και 5 μαύρες μπάλες, ποια η πιθανότητα μία από τις μπάλες της επιλογής μας να είναι λευκή και οι δύο άλλες μαύρες;*

Λύση: Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία κάνουμε την επιλογή των μπαλών, τότε ο δειγματοχώρος αποτελείται από $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ δυνατά αποτελέσματα. Επίσης υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα για τα οποία πρώτη μπάλα της επιλογής θα είναι λευκή και οι άλλες δύο μαύρες· $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα όπου η πρώτη θα είναι μαύρη, η δεύτερη λευκή και η τρίτη μαύρη και $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ αποτελέσματα όπου οι δύο πρώτες θα είναι μαύρες και η τρίτη λευκή. Έτσι υποθέτοντας την «τυχαία επιλογή», δηλαδή ότι κάθε αποτέλεσμα είναι το ίδιο πιθανό να πραγματοποιηθεί, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}.$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί θεωρώντας το αποτέλεσμα του πειράματος σαν το μη διατεταγμένο σύνολο από μπάλες που επιλέξαμε. Έτσι υπάρχουν $\binom{11}{3} = 165$ δυνατά αποτελέσματα στον δειγματοχώρο. Καθένα σύνολο από

3 μπάλες αντιστοιχεί σε 3! αποτελέσματα όταν λαμβάνεται υπόψιν η διάταξη. Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα να πραγματοποιηθούν όταν μας ενδιαφέρει η σειρά που επιλέγουμε τις μπάλες, τότε συμπεραίνουμε ότι παραμένουν εξίσου ισοπίθανα όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα μη διατεταγμένο σύνολο από τις μπάλες της επιλογής μας. Έτσι θα έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11},$$

που συμφωνεί, φυσικά, με το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν. $\square$

Άσκηση 4 *Μία επιτροπή από 5 άτομα επιλέγεται από μία ομάδα από 6 άντρες και 9 γυναίκες. Αν η επιλογή γίνεται τυχαία, ποια η πιθανότητα η επιτροπή να αποτελείται από 3 άντρες και 2 γυναίκες;*

***Λύση**:* Ας υποθέσουμε ότι *τυχαία επιλογή* σημαίνει ότι καθένα από τους $\binom{15}{5}$ δυνατούς συνδυασμούς είναι το ίδιο πιθανό να επιλεχτεί. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

$\square$

Άσκηση 5 *Ένα κουτί περιέχει n μπάλες, από τις οποίες μία είναι άσπρη και οι υπόλοιπες μαύρες. Αν τραβήξουμε k από αυτές, μία κάθε φορά, ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε την άσπρη μπάλα;*

***Λύση**:* Αν δεν μεροληπτούμε στην επιλογή μας, θα έχουμε ότι το σύνολο από k μπάλες που επιλέξαμε είναι το ίδιο πιθανό να είναι οποιοδήποτε από τα $\binom{n}{k}$ σύνολα από k μπάλες. Γιαυτό,

$$P\{\text{να επιλεγεί η ιδιαίτερη μπάλα}\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}.$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε το παραπάνω αποτέλεσμα θέτοντας A_i να συμβολίζει το ενδεχόμενο η άσπρη μπάλα να είναι η i-οστή μπάλα που θα επιλεχθεί, με

$i = 1, \ldots, k$. Τότε καθώς κάθε μία από τις n μπάλες είναι το ίδιο πιθανό να είναι η i-οστή μπάλα που θα επιλεχθεί, συνεπάγεται ότι $P(A_i) = 1/n$. Έτσι, καθώς αυτά τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα κατά ζεύγη, θα έχουμε

$$P\{\text{να επιλεγεί η άσπρη μπάλα}\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}.$$

Τέλος θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι $P(A_i) = 1/n$, παρατηρώντας ότι υπάρχουν $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$ ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, από τα οποία $(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)(1)(n-i)\cdots(n-k+1) = (n-1)!/(n-k)!$ αντιστοιχούν σε αυτά όπου η i-οστή μπάλα της επιλογής μας θα είναι η ιδιαίτερη μπάλα. Από αυτό, έπεται ότι

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

□

Άσκηση 6 *Έστω πως $n+m$ μπάλες, εκ των οποίων οι n είναι κόκκινες και οι m μπλε, τοποθετούνται σε μία διατεταγμένη σειρά, με τέτοιον τρόπο ώστε όλες οι $(n+m)!$ δυνατές διατάξεις να είναι ισοπίθανες. Αν καταγράψουμε τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος σημειώνοντας μόνο τα χρώματα των διαδοχικών μπαλών, δείξτε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα παραμένουν ισοπίθανα.*

Λύση: Ας πάρουμε κάθε μία από τις $(n+m)!$ δυνατές διατάξεις και να παρατηρήσουμε ότι κάθε μετάθεση των κόκκινων μπαλών μεταξύ τους, δεν επηρεάζει την ακολουθία των χρωμάτων. Σαν αποτέλεσμα αυτού, κάθε διάταξη των χρωμάτων αντιστοιχεί σε $n!\ m!$ διαφορετικές διατάξεις των $n+m$ μπαλών, έτσι κάθε διάταξη των χρωμάτων έχει πιθανότητα $\frac{n!m!}{(n+m)!}$ να πραγματοποιηθεί.

Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχουν 2 κόκκινες μπάλες, με αρίθμηση κ_1, κ_2 και δύο μπλε με αρίθμηση μ_1, μ_2. Τότε, από τις 4! δυνατές διατάξεις, θα υπάρχουν 2! 2! διατάξεις που θα πραγματοποιούνται σε κάθε ένα χρωματικό συνδυασμό Για παράδειγμα, οι παρακάτω διατάξεις αφορούν τις διαδοχικές μπάλες που εναλλάσσονται στο χρώμα αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη:

$$\kappa_1, \mu_1, \kappa_2, \mu_2 \quad \kappa_1, \mu_2, \kappa_2, \mu_1 \quad \kappa_2, \mu_1, \kappa_1, \mu_2 \quad \kappa_2, \mu_2, \kappa_1, \mu_1.$$

Έτσι, κάθε μία από τις δυνατές χρωματικές διατάξεις έχει πιθανότητα $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ να πραγματοποιηθεί. □

Άσκηση 7 *Στο πόκερ μοιράζονται 5 κάρτες στον κάθε παίκτη. Αν οι κάρτες κάποιου έχουν διαφορετικές διαδοχικές τιμές χωρίς όλες να είναι του ίδιου χρώματος (μπαστούνια, κούπες, καρό ή σπαθιά), λέμε ότι έχει «κέντα». Για παράδειγμα, μία μοιρασιά που αποτελείται από πέντε κούπα, έξι κούπα, επτά κούπα, οκτώ κούπα και εννιά μπαστούνι είναι κέντα. Ποια η πιθανότητα να μοιράσουν σε κάποιον πέντε φύλλα που θα σχηματίζουν «κέντα»;*

Λύση: Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ δυνατές μοιρασιές είναι ισοπίθανες. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των αποτελεσμάτων που σχηματίζουν «κέντα», θα υπολογίσουμε πρώτα τον αριθμό όλων των δυνατών αποτελεσμάτων για τα οποία μία μοιρασιά αποτελείται από έναν άσσο, ένα δύο, ένα τρία, ένα τέσσερα και ένα πέντε (το χρώμα εδώ δεν μας ενδιαφέρει). Καθώς ο άσσος μπορεί να είναι ένας από τους τέσσερις άσσους, όμοια και για τις άλλες κάρτες, υπάρχουν 4^5 δυνατά αποτελέσματα που που μπορούν να μας δώσουν την παραπάνω μοιρασιά. Γι'αυτό, καθώς στα τέσσερα από αυτά τα αποτελέσματα όλες οι κάρτες θα είναι του ίδιου χρώματος (τότε λέμε ότι τα πέντε φύλλα σχηματίζουν «φλος»), θα έχουμε ότι υπάρχουν 4^5-4 μοιρασιές που θα σχηματίζουν «κέντα» στο πέντε, δηλαδή «κέντα» της μορφής: άσσος, δύο, τρία τέσσερα και πέντε. Παρόμοια υπάρχουν 4^5-4 μοιρασιές που θα σχηματίζουν «κέντα» στον άσσο: δέκα, Βαλές, Ντάμα, Ρήγας και άσσος. Συνεπώς υπάρχουν $10(4^5-4)$ μοιρασιές που σχηματίζουν «κέντα». Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039$$

□

Άσκηση 8 *Σε ένα παιχνίδι στο πόκερ μοιράζουμε πέντε φύλλα. Αν τα φύλλα μας αποτελούνται από μία τριάδα και ένα ζεύγος ίδιων καρτών τότε τα φύλλα σχηματίζουν «φουλ». Ποια η πιθανότητα να μοιράσουν σε κάποιον πέντε φύλλα που θα σχηματίζουν «φουλ»;*

Λύση: Υποθέτουμε πάλι ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ δυνατές μοιρασιές είναι ισοπίθανες. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των των αποτελεσμάτων που σχηματίζουν «φουλ», παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$, διαφορετικοί συνδυασμοί που μπορεί να γίνουν, για παράδειγμα, από δύο δεκάρια και 3 βαλέδες. Καθώς υπάρχουν 13 διαφορετικές επιλογές για το είδος του ζεύγους και, αφού το ζευγάρι θα έχει επιλεχθεί, άλλες 13 επιλογές για το είδος της τριάδας, θα έπεται πως η πιθανότητα για «φουλ» είναι:

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0.0014$$

□

Άσκηση 9 *Σε ένα παιχνίδι μπριτζ όλα τα φύλλα από μία τράπουλα με 52 χαρτιά μοιράστηκαν σε 4 παίκτες. Ποια η πιθανότητα:*

(α) ένας παίκτης να πάρει όλα (και τα 13) μπαστούνια,

(β) κάθε παίκτης να πάρει έναν άσσο;

***Λύση**:* (α) Υπάρχουν $\binom{52}{13,13,13,13}$ δυνατοί τρόποι να μοιράσουμε τα φύλλα σε τέσσερις διαφορετικούς παίκτες. Καθώς υπάρχουν $\binom{39}{13,13,13}$ δυνατοί τρόποι να μοιράσουμε τα φύλλα έτσι ώστε ένας συγκεκριμένος παίκτης να πάρει και τα 13 μπαστούνια, έπεται ότι η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$\frac{4\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 6.3 \times 10^{-12}.$$

(β) Για να καθορίσουμε τον αριθμό αποτελεσμάτων όπου ο κάθε ένας από τους τέσσερις παίκτες, θα λάβει και έναν άσσο, ας ξεχωρίσουμε από την τράπουλα τους τέσσερις άσσους και ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν $\binom{48}{12,12,12,12}$ πιθανοί τρόποι μοιράσματος των υπόλοιπων 48 καρτών, όπου ο κάθε παίκτης θα λάβει από 12 κάρτες. Καθώς υπάρχουν 4! τρόποι να μοιράσουμε τους 4 άσσους έτσι ώστε ο κάθε παίκτης να λάβει και από έναν, παίρνουμε ότι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων όπου ο κάθε παίκτης θα λάβει ακριβώς έναν άσσο είναι $4!\binom{48}{12,12,12,12}$. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{4!\binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 0.105$$

□

Άσκηση 10 *Αν n άνθρωποι είναι παρώντες σε ένα δωμάτιο, ποια η πιθανότητα δύο από αυτούς να μην έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n έτσι ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη του $\frac{1}{2}$;*

***Λύση**:* Καθώς κάθε άτομο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες, υπάρχει ένα σύνολο από $(365)^n$ πιθανά αποτελέσματα. (Αγνοούμε την πιθανότητα κάποιος να έχει γεννηθεί στις 29 Φεβρουαρίου.) Υποθέτοντας πως κάθε ένα από τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανο να πραγματοποιηθεί, βλέπουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(365)(364)(363)\ldots(365-n+1)/(365)^n$. Είναι πέρα από κάθε προσδοκία το γεγονός ότι για $n \geq 23$, αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει πως αν υπάρχουν 23 ή περισσότερα άτομα σε έναν χώρο, η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$. □

Άσκηση 11 *Ανακατεύουμε μία τράπουλα από 52 χαρτιά. Ανοίγουμε τις κάρτες μία μία μέχρι την εμφάνιση του πρώτου άσσου. Είναι πιθανότερο, η επόμενη κάρτα που θα τραβήξουμε να είναι άσος μπαστούνι ή δύο κούπα;*

Λύση: Για να καθορίσουμε την πιθανότητα, η κάρτα που θα τραβήξουμε έπειτα από τον πρώτο άσσο να είναι ο άσσος μπαστούνι, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε πόσες από τις (52)! πιθανές διατάξεις των καρτών έχουν τον άσσο μπαστούνι, αμέσως μετά τον πρώτο άσσο. Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε πως κάθε διάταξη των 52 καρτών μπορεί να προκύψει από μία διάταξη των 51 καρτών που δεν περιέχουν τον άσσο μπαστούνι, βάζοντας έπειτα το χαρτί που λείπει σε αυτήν την διάταξη. Επίσης, για κάθε μία από τις (51)! διατάξεις των υπόλοιπων καρτών, υπάρχει μόνο μία θέση όπου μπορεί να τοποθετηθεί ο άσσος μπαστούνι έτσι ώστε να ακολουθεί ακριβώς μετά από τον πρώτο άσσο. Για παράδειγμα, αν η διάταξη των 51 καρτών είναι

$$4\clubsuit, 6\heartsuit, J\spadesuit, 5\spadesuit, A\clubsuit, 7\diamondsuit, \ldots, K\heartsuit,$$

τότε η μόνη δυνατή θέση που μπορεί να μπει ο άσσος μπαστούνι στην παραπάνω διάταξη έτσι ώστε να ακολουθεί τον πρώτο άσσο είναι

$$4\clubsuit, 6\heartsuit, J\spadesuit, 5\spadesuit, A\clubsuit, A\spadesuit, 7\diamondsuit, \ldots, K\heartsuit.$$

Έτσι παρατηρούμε πως υπάρχουν (51)! διατάξεις με τον άσσο κούπα να ακολουθεί τον πρώτο άσσο, γι'αυτό

$$P\{\text{ο άσσος μπαστούνι να ακολουθεί του πρώτου άσσου}\} = \frac{(51)!}{(52)!} = \frac{1}{52}.$$

Χρησιμοποιώντας ακριβώς το ίδιο επιχείρημα, θα έχουμε την πιθανότητα του δύο κούπα (ή οποιασδήποτε άλλης συγκεκριμένης κάρτας) να ακολουθεί τον πρώτο άσσο της τράπουλας να είναι επίσης $\frac{1}{52}$. Ισοδύναμα, καθένα από τα 52 χαρτιά της τράπουλας είναι ισοπίθανο να είναι αυτό που ακολουθεί του πρώτου άσσου. □

Άσκηση 12 *Μία ποδοσφαιρική ομάδα αποτελείται από 20 αμυντικούς και 20 επιθετικούς παίκτες (μαζί με τους αναπληρωματικούς). Οι παίκτες θα χωριστούν σε ομάδες των δύο ατόμων. Αν η ομαδοποίηση γίνει στην τύχη, ποια η πιθανότητα να μην υπάρχουν ζευγάρια που αποτελούνται από έναν επιθετικό και έναν αμυντικό; Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν $2i$ ζεύγη επιθετικού-αμυντικού, με $i = 1, 2, \ldots, 10$;*

Λύση: Υπάρχουν

$$\binom{40}{2, 2, \ldots, 2} = \frac{(40)!}{(2!)^{20}}$$

τρόποι να χωρίσουμε τους 40 παίκτες σε 20 *διατεταγμένα* ζεύγη των δύο. [Δηλαδή, υπάρχουν $(40)!/2^{20}$ τρόποι να χωρίσουμε τους παίκτες σε ένα *πρώτο, δεύτερο, τρίτο* ζεύγος, κ.ο.κ.] Έτσι υπάρχουν $(40)!/2^{20}(20)!$ τρόποι για να χωρίσουμε τους παίκτες σε (μη διατεταγμένες) ομάδες των δύο ατόμων. Επίσης, καθώς δεν θα μπορούν να υπάρξουν ζεύγη αμυντικού-επιθετικού στην περίπτωση που οι επιθετικοί (καθώς και οι αμυντικοί) φτιάξουν μεταξύ τους ζεύγη, έπεται ότι θα υπάρχουν $[(20)!/2^{10}(10)!]^2$ από ζεύγη παικτών που αγωνίζονται στην ίδια θέση. Έτσι η πιθανότητα να μην υπάρχουν ζεύγη επιθετικών-αμυντικών παικτών, αν την ονομάσουμε P_0, θα δίνεται από

$$P_0 = \frac{\left(\dfrac{(20)!}{2^{10}(10)!}\right)^2}{\dfrac{(40)!}{2^{20}(20)!}} = \frac{[(20)!]^3}{[(10)!]^2(40)!}.$$

Για να καθορίσουμε την P_{2i}, την πιθανότητα να υπάρχουν $2i$ ζεύγη από αμυντικούς-επιθετικούς παίκτες, παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχουν $\binom{20}{2i}^2$ τρόποι να επιλέξουμε $2i$ αμυντικούς παίκτες και $2i$ επιθετικούς παίκτες που θα απαρτίζουν τα ζεύγη μας. Αυτοί οι $4i$ παίκτες μπορούν τότε να μας δώσουν $(2i)!$ δυνατά διαφορετικά ζεύγη επιθετικών-αμυντικών. (Αυτό γίνεται γιατί ο πρώτος επιθετικός μπορεί να φτιάξει ένα ζεύγος με οποιονδήποτε από τους $2i$ αμυντικούς, ο δεύτερος επιθετικός μπορεί να ζευγαρώσει με καθέναν από τους $2i-1$ εναπομείναντες, κ.ο.κ.) Καθώς οι εναπομείναντες $20-2i$ επιθετικοί (και αμυντικοί) πρέπει να ομαδοποιηθούν μεταξύ τους, συνεπάγεται ότι υπάρχουν

$$\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2$$

ομαδοποιήσεις που οδηγούν σε $2i$ ζεύγη αμυντικών-επιθετικών. Γι'αυτό

$$P_{2i} = \frac{\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\dfrac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2}{\dfrac{(40)!}{2^{20}(20)!}} \qquad i = 0, 1, \ldots, 10.$$

Οι $P_{2i}, i = 0, 1, \ldots, 10$, μπορούν τώρα να υπολογιστούν ή να προσεγγιστούν χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα του Stirling που δείχνει ότι το $n!$ μπορεί να προσεγγιστεί από το $n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$. Για παράδειγμα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &P_0 \approx 1.3403 \times 10^{-6} \\ &P_{10} \approx 0.345861 \\ &P_{20} \approx 7.6068 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 13 *Ένα σύνολο από 36 μέλη μίας λέσχης παίζουν τένις, 28 παίζουν σκάκι και 18 μπιλιάρδο. Επίσης 22 από τα μέλη παίζουν τένις και σκάκι, 12* *παίζουν τένις και μπιλιάρδο, 9 παίζουν σκάκι και μπιλιάρδο και 4 ασχολούνται και με τα τρία. Πόσα μέλη αυτής της λέσχης έχουν τουλάχιστον ένα από αυτά τα ενδιαφέροντα;*

Λύση: Έστω N να συμβολίζει τον αριθμό των μελών της λέσχης. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα μέλη και ορίζουμε μία πιθανότητα. Αν για κάθε υποσύνολο από C μέλη της λέσχης, συμβολίσουμε με $P(C)$ την πιθανότητα ότι το μέλος που έχουμε επιλέξει περιέχεται στο C τότε

$$P(C) = \frac{\text{αριθμό μελών στο } C}{N}.$$

Τώρα, αν T συμβολίζει το σύνολο μελών που παίζουν τένις, Σ το σύνολο των μελών που ασχολούνται με το σκάκι και M το σύνολο αυτών που παίζουν μπιλιάρδο, έχουμε από την Πρόταση 4.4 ότι

$$\begin{aligned}
&P(T \cup S \cup M) \\
&= P(T) + P(\Sigma) + P(M) - P(T \cap \Sigma) - P(T \cap M) - P(\Sigma \cap M) + P(T \cap \Sigma \cap M) \\
&= \frac{36 + 28 + 18 - 22 - 12 - 9 + 4}{N} \\
&= \frac{43}{N}
\end{aligned}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι 43 μέλη έχουν τουλάχιστον ένα από τα παραπάνω ενδιαφέροντα. $\square$

Το επόμενο παράδειγμα αυτής της ενότητας όχι μόνο καταφέρνει να δώσει απάντηση σε ένα εντυπωσιακό πρόβλημα, αλλά είναι επίσης και θεωρητικού ενδιαφέροντος.

Άσκηση 14 (Το πρόβλημα της αντιστοίχησης) *Έστω πως καθένας από τους N άντρες μιας παρέας πετάει το καπέλο του στο κέντρο ενός δωματίου. Τα καπέλα πρώτα μπερδεύονται και έπειτα σε κάθε άντρα δίνεται και από ένα. Ποια η πιθανότητα*

(α) να μην πάρει κανένας το καπέλο του,

(β) ακριβώς σε k από αυτούς να δοθεί το καπέλο που τους ανήκει;

Λύση: (α) Πρώτα υπολογίζουμε την συμπληρωματική πιθανότητα, τουλάχιστον ένας από τους άντρες, να του δοθεί το καπέλο του. Ας συμβολίσουμε με $E_i, i = 1, 2, \ldots, N$ το ενδεχόμενο ο i-οστός άντρας να του δοθεί το καπέλο που του ανήκει. Από την Πρόταση 4.4 θα έχουμε ότι $P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)$, η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους άντρες να του δοθεί το καπέλο του, θα δίνεται από

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(\cap_{j=1}^{n} E_{i_j})$$
$$+ \cdots + (-1)^{N+1} P(\cap_{j=1}^{N} E_j)$$

Αν σκεφτούμε το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος σαν ένα διάνυσμα από N αριθμούς, όπου το $i-$οστό στοιχείο είναι ο αριθμός του καπέλου που δόθηκε στον $i-$οστό άνθρωπο, τότε υπάρχουν $N!$ δυνατά αποτελέσματα. [Το αποτέλεσμα $(1, 2, 3, \ldots, N)$ σημαίνει για παράδειγμα ότι σε κάθε άντρα δίνεται το καπέλο του.] Επίσης, $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}$, το ενδεχόμενο ότι σε κάθε έναν από τους n άντρες $i_1, i_2, \ldots, i_n$ να δοθεί το καπέλο που του ανήκει, μπορεί να πραγματοποιηθεί με $(N-n)(N-n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (N-n)!$ δυνατούς τρόπους· ενώ, για τους υπόλοιπους $N-n$ άντρες, στον πρώτο μπορεί να δοθεί καθένα από τα $N-n$ καπέλα, στον δεύτερο καθένα από τα $N-n-1$ καπέλα, κ.ο.κ. Παρατηρώντας ότι καθένα από τα $N!$ δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανο να πραγματοποιηθεί, βλέπουμε ότι

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

Επίσης, καθώς υπάρχουν $\binom{N}{n}$ όροι στο $\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n})$, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(\cap_{j=1}^{n} E_{i_j}) = \frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!} = \frac{1}{n!}$$

και γι'αυτό

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

Έτσι η πιθανότητα να μην δοθεί σε κανέναν το καπέλο του, είναι

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

το οποίο, για μεγάλα N είναι περίπου ίσο με $e^{-1} \approx 0.36788$.

(β) Για να πάρουμε την πιθανότητα που σε ακριβώς k από τους N άντρες δίνεται το καπέλο που τους ανήκει, πρώτα συγκεντρώνουμε την προσοχή μας σε ένα συγκεκριμένο σύνολο από k άντρες. Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν σε αυτούς τους k άντρες τα καπέλα τους ισούται με τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούν να μοιραστούν τα καπέλα που ανήκουν στους υπόλοιπους $N-k$ άντρες, έτσι ώστε κανένας να μην λάβει το δικό του καπέλο. Αλλά καθώς

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!},$$

είναι η πιθανότητα που σε κανέναν από τους $N-k$ άντρες να μην του δοθεί το καπέλο που του ανήκει, έπεται λοιπόν πως οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να δοθεί το καπέλο που του ανήκει, στο σύνολο αυτό των k αντρών είναι

$$(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right].$$

Έτσι, καθώς υπάρχουν $\binom{N}{k}$ δυνατοί τρόποι να δοθούν τα καπέλα σε ένα σύνολο από k άντρες, έπεται ότι υπάρχουν

$$\binom{N}{k}(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

τρόποι με τους οποίους σε καθέναν από τους k άντρες θα δοθεί το καπέλο του. Γι'αυτό τον λόγο, η επιθυμητή πιθανότητα θα είναι

$$\frac{\binom{N}{k}(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]}{N!}$$
$$=\frac{1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}}{k!},$$

που για μεγάλα N είναι περίπου $e^{-1}/k!$. Οι τιμές $e^{-1}/k!, k=0,1,\ldots,$ έχουν κάποια θεωρητική σημασία καθώς αντιπροσωπεύουν τις τιμές που συσχετίζονται με την κατανομή Poisson. □

Άσκηση 15 *Αν 10 παντρεμένα ζευγάρια κάθονται στην τύχη σε ένα κυκλικό τραπέζι, υπολογίστε την πιθανότητα καμία σύζυγος να μην κάθεται δίπλα στον άντρα της.*

Λύση: Αν συμβολίσουμε με $E_i, i=1,2,\ldots,10$ το ενδεχόμενο το i-οστό ζεύγος να κάθεται σε διπλανή θέση, έπεται ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1-P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right)$. Από το Θεώρημα Εγκλεισμού-Αποκλεισμού θα έχουμε

$$P\left(\bigcup_{1}^{10} E_i\right)=\sum_{1}^{10} P(E_i)-\cdots+(-1)^{n+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(\bigcap_{j=1}^{n} E_{i_j})$$
$$+\cdots-P(\bigcap_{i=1}^{10} E_i).$$

Για να υπολογίσουμε τις $P(\bigcap_{j=1}^{n} E_{i_j})$, πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν 19! τρόποι να καθήσουν 20 άνθρωποι γύρω από ένα τραπέζι (γιατί;). Οι διαφορετικοί τρόποι που ένα συγκεκριμένο σύνολο από n άντρες μπορεί να καθίσει δίπλα στις συζύγους του, μπορούν πολύ εύκολα να προκύψουν αν αναλογιστούμε το κάθε ένα από τα n ζεύγη σαν μία οντότητα. Αν το κάνουμε, τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε τους τρόπους που $20-n$ οντότητες μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι και υπάρχουν $(20-n-1)!$ τέτοιοι τρόποι. Τέλος καθώς το κάθε ένα από τα n παντρεμένα ζεύγη μπορεί να καθίσει μαζί με δυο διαφορετικούς τρόπους, έπεται ότι θα υπάρχουν $2^n(20-n-1)!$ τρόποι με τους οποίους κάθε ένας άντρας από το συγκεκριμένο σύνολο των n αντρών, μπορεί να καθίσει μαζί με την γυναίκα του. Γι'αυτό,

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = \frac{2^n(19-n)!}{(19)!}.$$

Έτσι, από την Πρόταση 4.4, παίρνουμε ότι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα παντρεμένα ζεύγη να καθίσει μαζί ισούται με

$$\binom{10}{1} 2^1 \frac{(18)!}{(19)!} - \binom{10}{2} 2^2 \frac{(17)!}{(19)!} + \binom{10}{3} 2^3 \frac{(16)!}{(19)!} - \cdots - \binom{10}{10} 2^{10} \frac{9!}{(19)!} \approx 0.6605$$

και η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου ίση με 0.3395. $\square$

2 Ασκήσεις για Εξάσκηση

1. Ένα κουτί περιέχει 3 βόλους, 1 κόκκινο, 1 πράσινο και 1 μπλε. Ας υποθέσουμε ένα πείραμα που αποτελείται από την αφαίρεση ενός βόλου από το κουτί, μετά την επανατοποθέτηση του και έπειτα την επιλογή ενός δεύτερου βόλου από το κουτί. Περιγράψτε τον δειγματοχώρο. Επαναλάβετε το πείραμα όταν ο δεύτερος βόλος αφαιρείται χωρίς την επανατοποθέτηση του πρώτου.

2. Ένα ζάρι ρίχνεται επανειλημμένα μέχρι να εμφανιστεί ένα 6. Τότε το πείραμα σταματάει. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος; Αν E_n συμβολίζει το ενδεχόμενο ότι χρειάζονται n ρίψεις για να τερματιστεί το πείραμα, ποια στοιχεία του δειγματοχώρου περιέχονται στο E_n; Ποιο είναι το $\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_n\right)^c$;

3. Ρίχνονται δύο ζάρια. Έστω E είναι το ενδεχόμενο το άθροισμα των ζαριών να είναι ένας περιττός αριθμός· έστω F να συμβολίζει το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα ζάρια να φέρει 1 και τέλος G είναι το ενδεχόμενο το άθροισμα να είναι 5. Περιγράψτε τα ενδεχόμενα $E \cap F, E \cup F, F \cap G, E \cap G^c$ και $E \cap F \cap G$.

4. Οι A, B, και C στρίβουν ένα νόμισμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει. Να ορίσετε ένα δειγματοχώρο Ω για το πείραμα.

   (α΄) Ορίστε τα ακόλουθα ενδεχόμενα, με όρους του Ω:

   i. κερδίζει ο $A = A$.

   ii. κερδίζει ο $B = B$.

   iii. $(A \cup B)^c$.

   Υποθέστε ότι ο A στρίβει πρώτος το νόμισμα, έπειτα ο B, μετά ο C και η διαδικασία επαναλάμβανεται.

5. Ένα σύστημα αποτελείται από 5 εξαρτήματα, κάθε ένα από τα οποία είτε δουλεύει είτε είναι χαλασμένο. Θεωρείστε το πείραμα που αποτελείται από την παρατήρηση της κατάστασης των εξαρτημάτων και υποθέστε ότι το ενδεχόμενο που δίνεται από το διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, όπου τα x_i ισούνται με 1 αν το i εξάρτημα δουλεύει καλά και με 0 αν το i εξάρτημα είναι χαλασμένο. σψστεμ

   (α΄) Από πόσα αποτελέσματα αποτελείται ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος;

   (β΄) Υποθέστε ότι το σύστημα θα δουλέψει αν τα εξαρτήματα 1 και 2 δουλεύουν, ή αν τα εξαρτήματα 3 και 4 δουλεύουν, ή αν τα εξαρτήματα 1, 3 και 4 δουλεύουν. Αν W είναι το ενδεχόμενο ότι το σύστημα θα δουλέψει, καθορίστε όλα τα αποτελέσματα που ανήκουν στο ενδεχόμενο W.

   (γ΄) Αν A είναι το ενδεχόμενο τα εξαρτήματα 4 και 5 να είναι χαλασμένα, πόσα αποτελέσματα περιέχονται στο ενδεχόμενο A;

   (δ΄) Γράψτε όλα τα αποτελέσματα που ανήκουν στο ενδεχόμενο $A \cap W$.

6. Υποθέστε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα κατά ζεύγη, για τα οποία ισχύει $P(A) = 0.3$ και $P(B) = 0.5$. Ποια είναι η πιθανότητα

   (α΄) να πραγματοποιηθεί το A ή το B,

   (β΄) να πραγματοποιηθεί το A και να μην πραγματοποιηθεί το B,

   (γ΄) να πραγματοποιηθούν το A και το B;

7. Το 28% των κατοίκων μιας πόλης καπνίζει τσιγάρα, 7% καπνίζουν πούρα και ένα 5% καπνίζει τσιγάρα και πούρα.

   (α΄) Τι ποσοστό δεν καπνίζει;

   (β΄) Τι ποσοστό καπνίζει πούρα αλλά όχι τσιγάρα;

8. Ένα δημοτικό προσφέρει 3 διαφορετικά μαθήματα στις ξένες γλώσσεσ: ένα στα Αγγλικά, ένα στα Γαλλικά και ένα στα Γερμανικά. Αυτά τα μαθήματα είναι ελεύθερα για το καθένα από τα 100 παιδιά που είναι μαθητές του σχολείου. Υπάρχουν 28 μαθητές για το μάθημα των Αγγλικών, 26 για το μάθημα των Γαλλικών και 16 για τα Γερμανικά. Υπάρχουν 12 μαθητές που παρακολουθούν Αγγλικά και Γαλλικά, 4 που παρακολουθούν Αγγλικά και Γερμανικά και 6 που παρακολουθούν Γαλλικά και Γερμανικά. Επίσης υπάρχουν και 2 μαθητές που παρακολουθούν και τα 3 μαθήματα.

   (α΄) Αν επιλεχθεί ένας μαθητής τυχαία, ποια η πιθανότητα ότι αυτός ή αυτή να μην παρακολουθεί κάποιο μάθημα ξένων γλωσσών;

   (β΄) Αν επιλεχθεί ένας μαθητής τυχαία, ποια η πιθανότητα ότι αυτός ή αυτή να παρακολουθεί ακριβώς ένα από τα παραπάνω μαθήματα;

   (γ΄) Αν δύο μαθητές επιλεχθούν τυχαία, ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από αυτούς να παρακολουθεί ένα μάθημα ξένης γλώσσας;

9. Μία πόλη με πληθυσμό 100.000 κατοίκων έχει 3 εφημερίδεσ: I, II και III. Οι αναλογίες των κατοίκων που διαβάζουν αυτές τις εφημερίδες έχουν ως εξήσ:

$$\begin{array}{rrl} \mathrm{I}: 10\% & \mathrm{I}\text{ και }\mathrm{II}: 8\% & \mathrm{I}\text{ και }\mathrm{II}\text{ και }\mathrm{III}: 1\% \\ \mathrm{II}: 30\% & \mathrm{I}\text{ και }\mathrm{III}: 2\% & \\ \mathrm{III}: 5\% & \mathrm{II}\text{ και }\mathrm{III}: 4\% & \end{array}$$

   (α΄) Βρείτε τον αριθμό των ατόμων που διαβάζουν μόνο μία εφημερίδα.

   (β΄) Πόσοι άνθρωποι διαβάζουν τουλάχιστον δύο εφημερίδες;

   (γ΄) Αν I και III είναι πρωινές εφημερίδες και η II είναι απογευματινή, πόσοι άνθρωποι διαβάζουν τουλάχιστον μία πρωινή και μία απογευματινή;

   (δ΄) Πόσα άτομα δεν διαβάζουν καμία εφημερίδες;

   (ε΄) Πόσα άτομα διαβάζουν ακριβώς μία πρωινή και μία απογευματινή εφημερίδα;

10. Τα ακόλουθα δεδομένα αφορούν την μελέτη 1000 συνδρομητών ενός συγκεκριμένου περιοδικού: Σχετικά με την δουλεία τους, την οικογενειακή κατάσταση και την εκπαίδευση τους υπήρχαν: 312 εργαζόμενοι, 470 παντρεμένα άτομα, 520 απόφοιτοι πανεπιστημίου, 42 εργαζόμενοι απόφοιτοι πανεπιστημίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι πανεπιστημίου, 86 παντρεμένοι εργαζόμενοι και 25 παντρεμένοι εργαζόμενοι απόφοιτοι πανεπιστημίου. Δείξτε ότι οι παραπάνω αριθμοί που αναφέρθηκαν στην μελέτη πρέπει να είναι λανθασμένοι.

11. Αν υποθέσουμε ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ μοιρασιές σε ένα παιχνίδι πόκερ είναι ισοπίθανες, ποια η πιθανότητα έχουν μοιραστεί:

(α΄) ένα «φλος»; (Αυτό συμβαίνει όταν και οι 5 κάρτες έχουν το ίδιο χρώμα.)

(β΄) ένα ζεύγος; (Αυτό συμβαίνει όταν οι κάρτες έχουν τιμές a, a, b, c, d,όπου a, b, c και d είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.)

(γ΄) δύο ζεύγη; (Αυτό συμβαίνει όταν οι κάρτες έχουν τιμές a, a, b, b, c, όπου a, b και c είναι όλα διαφορετικά.)

(δ΄) μία τριάδα; (Αυτό συμβαίνει όταν οι κάρτες έχουν τιμές a, a, a, b, c, όπου a, b και c είναι όλα διαφορετικά.)

(ε΄) ένα «καρέ»; (Αυτό συμβαίνει όταν οι κάρτες έχουν τιμές a, a, a, a, b.)

12. Τα ζάρια-πόκερ παίζονται ρίχνοντας ταυτόχρονα 5 ζάρια. Χρησιμοποιώντας ορολογία από το πόκερ, δείξτε ότι

(α΄) $P\{$όλα τα ζάρια διαφορετικά$\} = 0.0926$,

(β΄) $P\{$ένα ζεύγος$\} = 0.4630$,

(γ΄) $P\{$δύο ζεύγη$\} = 0.2315$,

(δ΄) $P\{$μια τριάδα$\} = 0.1543$,

(ε΄) $P\{$«φουλ», δηλαδή ένα ζεύγος και μία τριάδα$\} = 0.0386$,

(ϛ΄) $P\{$«καρέ», δηλαδή τέσσερα ίδια ζάρια$\} = 0.0193$,

(ζ΄) $P\{$πέντε ίδια ζάρια$\} = 0.0008$.

13. Σε μία σκακιέρα τοποθετούμε τυχαία 8 πύργους. Υπολογίστε την πιθανότητα κανένας από τους πύργους να μπορεί να απειλήσει κάποιον από τους υπόλοιπους. Αυτό σημαίνει, υπολογίστε την πιθανότητα καμία στήλη ή γραμμή να περιέχει πάνω από έναν πύργο.

14. Έχουμε δύο όμοια ζάρια, που το κάθε ένα έχει: δύο από τις πλευρές του βαμμένες κόκκινες, δύο βαμμένες μαύρες, δύο κίτρινες και δύο λευκές. Όταν ρίξουμε και τα δύο ζάρια ποια η πιθανότητα να φέρουν το ίδιο χρώμα;

15. Το μπαρμπούτι παίζεται ως εξής: ένας παίκτης ρίχνει δύο ζάρια. Αν το άθροισμα των ζαριών είναι 2 ή 3 ή 12, ο παίκτης χάνει· αν το άθροισμα είναι 7 ή 11 κερδίζει. Αν το άθροισμα είναι οτιδήποτε άλλο ο παίκτης συνεχίζει να ρίχνει τα ζάρια μέχρι να φέρει ξανά το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης ή 7. Αν φέρει το 7 πρώτο, ο παίκτης χάνει, ενώ αν φέρει πρώτο το αρχικό αποτέλεσμα κερδίζει. Υπολογίστε την πιθανότητα να νικήσει ένας παίκτης στο μπαρμπούτι.

16. Ένα κουτί περιέχει 3 κόκκινες και 7 μαύρες μπάλες. Οι παίκτες A και B τραβούν μπάλες από το κουτί διαδοχικά, μέχρι κάποιος να επιλέξει μία κόκκινη μπάλα οπότε και το πείραμα σταματά. Βρείτε την πιθανότητα ο παίκτης A να επιλέξει την κόκκινη μπάλα. (ο A τραβάει πρώτος μπάλα από το κουτί, έπειτα ο B, κ.ο.κ. Δεν υπάρχει επανατοποθέτηση των μπαλών που αφαιρέθηκαν.)

17. Ένα κουτί περιέχει 5 κόκκινες, 6 μπλε και 8 πράσινες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα σύνολο από 3 μπάλες, ποια η πιθανότητα κάθε μια από τις μπάλες να είναι (α) του ίδιου χρώματος· (β) διαφορετικού χρώματος; Επαναλάβατε, με την προϋπόθεση ότι όποτε μία μπάλα επιλέγεται, σημειώνεται το χρώμα της και έπειτα επανατοποθετείται μέσα στο κουτί πριν την επόμενη επιλογή. Αυτό είναι γνωστό σαν ***δειγματοχώρος με επανατοποθέτηση***.

18. Ένα κουτί περιέχει n λευκές και m μαύρες μπάλες, όπου n και m είναι θετικοί αριθμοί.

    (α΄) Αν δύο μπάλες επιλεχθούν τυχαία, ποια η πιθανότητα να είναι του ίδιου χρώματος;

    (β΄) Αν μια μπάλα επιλεχθεί τυχαία και μετά επανατοποθετηθεί στο κουτί πριν την επιλογή της δεύτερης, ποια η πιθανότητα ότι οι δύο μπάλες που επιλέχτηκαν να είναι του ίδιου χρώματος;

    (γ΄) Δείξτε ότι η πιθανότητα του υποερωτήματος (β΄) είναι πάντα μεγαλύτερη από αυτήν του υποερωτήματος (α΄).

19. Ένα δάσος περιέχει 20 ελάφια, από τα οποία 5 αιχμαλωτίσθηκαν, εμβολιάστηκαν και αφού τους έβαλαν κάποια αναγνωριστική ετικέτα, αφέθηκαν ελεύθερα. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα 4 από τα 20 ελάφια αιχμαλωτίσθηκαν Ποια η πιθανότητα 2 από αυτά τα 4, να είχαν πάνω ετικέτα;

20. Μια δασκάλα δίνει στην τάξη της ένα σύνολο 10 προβλημάτων και πληροφορεί τους μαθητές της ότι η τελική εξέταση θα είναι μια τυχαία επιλογή 5 από αυτών. Ένας μαθητής γνωρίζει την λύση 7 προβλημάτων. Ποια η πιθανότητα να γράψει σωστά στις εξετάσεισ:

    (α΄) και τα πέντε προβλήματα, δηλαδή άριστα,

    (β΄) τουλάχιστον σε 4 από τα προβλήματα;

21. Υπάρχουν 5 ξενοδοχεία σε μια πόλη. Αν 3 άτομα κλείσουν δωμάτιο σε ένα ξενοδοχείο της πόλης την ίδια μέρα, ποια η πιθανότητα να έχουν κάνει κρατήσεις σε διαφορετικά ξενοδοχεία; Τι παρατηρείτε;

22. Σε μια πόλη εργάζονται 4 άτομα που επιδιορθώνουν τηλεοράσεις. Αν χαλάσουν 4 τηλεοράσεις, ποια η πιθανότητα ακριβώς i από τους παραπάνω μάστορες να κλιθούν για να τις επισκευάσουν; Λύστε το πρόβλημα, για $i = 1, 2, 3, 4$. Τι παρατηρείτε;

23. Αν ένα ρίξουμε ένα ζάρι 4 φορές, ποια η πιθανότητα να φέρουμε 6 τουλάχιστον μία φορά;

24. Ρίχνουμε δύο ζάρια n φορές διαδοχικά. Υπολογίστε την πιθανότητα να εμφανιστεί ένα έξι τουλάχιστον δύο φορές. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n έτσι ώστε αυτή η πιθανότητα να είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}$;

25. Μια γυναίκα κρατάει n κλειδιά, αλλά μόνο ένα ανοίγει την πόρτα της.

    (α΄) Αν δοκιμάζει τα κλειδιά στην τύχη μέχρι να ανοίξει την πόρτα της, απορρίπτοντας εκείνα που δεν ταιριάζουν την κάθε φορά, ποια η πιθανότητα να τα καταφέρει στην κ της προσπάθεια;

    (β΄) Τι γίνεται αν δεν απορρίπτει τα κλειδιά που δεν ταιριάζουν;

26. Πόσοι άνθρωποι πρέπει να βρίσκονται σε ένα δωμάτιο έτσι ώστε η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα να είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}$; Υποθέστε ότι όλοι οι δυνατοί μήνεσ-αποτελέσματα είναι ισοπίθανοι.

27. Αν υπάρχουν 12 ξένοι σε ένα δωμάτιο, ποια η πιθανότητα κανένας από αυτούς να έχει γενέθλια τον ίδιο μήνα;

28. Μια ομάδα από 6 γυναίκες και 6 άντρες χωρίζεται με τυχαίο τρόπο σε 2 ομάδες των 6 ατόμων. Ποια η πιθανότητα και οι δύο ομάδες να έχουν τον ίδιο αριθμό αντρών;

29. Σε μία μοιρασιά στο μπριτζ, βρείτε την πιθανότητα να έχετε 5 σπαθιά και ο συμπαίκτης σας να έχει τα υπόλοιπα 8.

30. Έστω ότι n μπάλες ταξινομούνται με τυχαίο τρόπο σε N κουτιά. Βρείτε την πιθανότητα m μπάλες να πέσουν στο πρώτο κουτί. Θεωρείστε ότι όλες οι N^n διατάξεις είναι ισοπίθανες.

31. Μια ντουλάπα περιέχει 10 ζεύγη παπουτσιών. Αν επιλέξουμε τυχαία 8 παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα:

    (α΄) να μη σχηματίζουν ένα πλήρες ζεύγος,

    (β΄) να σχηματίζουν ακριβώς ένα πλήρες ζεύγος;

32. Αν 6 παντρεμένα ζευγάρια καθήσουν σε ένα τραπέζι μακρόστενο από τη μια πλευρά, βρείτε την πιθανότητα κανένας άντρας να μην κάθεταιδίπλα στην γυναίκα του.